Int. J. Solids Structures Vol. 19, No. 7, pp. 573–578, 1983
Printed in Great Britain.

0020-7683/83 $3.00+.00
Pergamon Press Ltd.

SUR LA DEFINITION DE LA VITESSE DE DEFORMATION ELASTIQUE EN GRANDE TRANSFORMATION ELASTOPLASTIQUE

JEAN MANDEL
Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

(*Received* 8 *July* 1982)

Résumé—La définition de la vitesse de déformation élastique au cours de grandes transformations plastiques donne lieu à des difficultés que nous avions méconnues dans un article antérieur[2] et sur lesquelles nous devons revenir. Nous donnons une définition eulérienne faisant intervenir la notion de repère directeur et liée à l'énergie élastique instantanément récupérable. Nous montrons qu'elle diffère de la définition lagrangienne (actualisée) de Rice[1].

Abstract—The definition of the rate of elastic deformation in a large elasto–plastic transformation is studied. We show that in eulerian variables, by use of a director frame, an energeticly correct definition can be given. It differs from the lagrangian (actualised) definition given by Rice[1]. Due to this fact some relations proposed in a previous paper[2] must be formulated in a slightly different way.

1. REPRESENTATION LAGRANGIENNE ET REPRESENTATION PAR CONFIGURATION INTERMEDIAIRE

On considère un élément de matière élastoplastique ou élastoviscoplastique en transformation finie. Pour décrire son comportement:

(1) Dans la représentation lagrangienne, on utilise une configuration de référence fixe (0). On désigne par $\mathbf{F}$ le gradient de la transformation faisant passer l'élément de la configuration (0) à la configuration actuelle (a).

(2) Dans la représentation par configuration intermédiaire, on imagine à partir de (a) une détente élastique de gradient $\mathbf{E}^{-1}$, amenant l'élément dans une configuration intermédiaire (κ) et on décompose $\mathbf{F}$ sous la forme:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{P}. \tag{1}$$

Il est nécessaire d'orienter la configuration relâchée. A cet effet, nous avons introduit[3] la notion de *repère directeur* (R. D. dans la suite).

Définition

Un repère directeur est un repère dans lequel l'état thermodynamique est défini par le tenseur de déformation $\mathbf{C} = \mathbf{I} + 2\mathbf{\Delta}$ ($\mathbf{\Delta}$ est le tenseur de Green, $\mathbf{C}$ celui de Cauchy), la température θ et un certain nombre de variables internes α scalaires ou tensorielles.

Il est commode de faire en sorte que ce repère conserve une direction fixe par rapport aux axes du laboratoire. Les configurations intermédiaires ainsi orientées sont dites *isoclines*. A titre d'exemple, supposons que, par rapport à un certain repère, la matrice des modules d'élasticité de l'élément reste constante au cours des déformations plastiques (tel est le cas d'un repère lié au réseau atomique d'un monocristal). Le repère en question sera un R.D. et nous maintiendrons fixe son orientation dans la suite des configurations relâchées (κ).

La matrice des modules élastiques se déduit de l'expression de l'énergie libre $\varphi = \tilde{\varphi}(\mathbf{\Delta}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$. Dans le cas général un R. D. est défini par l'invariance de cette fonction $\tilde{\varphi}$. Le signe ~ est utilisé (lorsqu'il y a lieu) pour distinguer la fonction mathématique de la grandeur physique.

Dans une transformation élastique les variables $\boldsymbol{\alpha}$ restent constantes et le R.D. subit la même rotation que l'élément.

Quoique l'idée d'une décharge totale ait jusqu'ici prévalu, la définition d'un R.D. n'implique pas que la configuration (0) soit sans contrainte. Nous pouvons la supposer soumise à une contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}_0$. A partir de la configuration actuelle (a) on ramène le R.D. à son orientation initiale et la contrainte de Cauchy ainsi que la température à leurs valeurs initiales. Notons que ceci n'équivaut pas à ramener la contrainte de Kirchhoff $\boldsymbol{\pi}_0$ par rapport à la configuration (0) à sa valeur initiale $\boldsymbol{\sigma}_0$. Cette contrainte de Kirchhoff se trouve ramenée à la valeur $(\rho_0/\rho_\kappa)\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_0\mathbf{P}^{T-1}$, ρ_0, ρ_κ désignant la masse volumique dans les configurations (0) et (κ).

Ne serait-il pas préférable de ramener $\boldsymbol{\pi}_0$ à sa valeur initiale ($\boldsymbol{\sigma}_0$)? Dans ce point de vue strictement lagrangien, qui est celui de Rice[1], on évite d'introduire un R.D. Mais l'énergie libre (et le critère d'écoulement) dépendront d'un nombre plus élevé de paramètres (les 9 composantes de la matrice $\mathbf{P}$ y apparaissent comme des variables parasites sans signification physique, cf. [4]).

On peut en particulier prendre la configuration actuelle à t comme configuration de référence fixe (0) entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ et imaginer à $t+\mathrm{d}t$ une détente infinitésimale ramenant le R.D. (défini à l'instant t), la contrainte de Cauchy et la température à leurs position et valeurs à l'instant t. Le R.D. n'intervient ici que pour préciser le mode de décharge, *différent de celui dans lequel la contrainte de Kirchhoff serait ramenée à* t. Ceci nous conduira à une définition de la vitesse de déformation élastique eulérienne différente de celle qu'on obtient en adoptant le point de vue strictement lagrangien "actualisé". On verra que cette différence, dont nous avions écarté la possibilité dans [2], joue un rôle dans l'interprétation énergétique de la puissance dépensée.

La notion de R.D. soulève la difficulté que voici. Etant donné un directeur, tout repère qui s'en déduit par une transformation orthogonale de matrice $\mathbf{V}(\boldsymbol{\alpha})$, fonction arbitraire des variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ est encore un R.D. d'après la définition. Notre but n'est pas ici, comme dans [4], de chercher s'il existe un ou des R.D. privilégiés (comme celui dans lequel la matrice d'élasticité resterait constante), mais d'étudier comment se modifient les relations de comportement (pour la partie élastique de la transformation) lorsqu'on passe d'un R.D. à un autre ou à un repère fixe (0).

Pour éviter des difficultés purement sémantiques nous n'utiliserons pas dans les paragraphes 2 et 3 l'expression "vitesse de déformation élastique" qui est source d'erreurs. D'autre part, pour alléger l'écriture des équations, nous laisserons de côté, sauf au n° 5, les variations de température qui ne suscitent aucun problème.

2. PASSAGE DE LA REPRESENTATION LAGRANGIENNE A LA REPRESENTATION PAR REPERE DIRECTEUR

2.1 *Représentation par configuration intermédiaire*

L'état est défini par $\mathbf{C}^e = \mathbf{E}^T\mathbf{E}$ et les variables d'écrouissage $\boldsymbol{\alpha}$. On peut aussi bien le définir par la contrainte de Kirchhoff $\boldsymbol{\pi}_\kappa$ par rapport à (κ) et les $\boldsymbol{\alpha}$. $\mathbf{C}^e$ est une fonction de $\boldsymbol{\pi}_\kappa$, $\boldsymbol{\alpha}$. En la dérivant par rapport à t, dans le repère directeur, on obtient:

$$\dot{\mathbf{C}}^e - \frac{\partial \mathbf{C}^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T = 2\mathbf{L}^{(\kappa)}: \dot{\boldsymbol{\pi}}_\kappa \tag{2}$$

$\mathbf{L}^{(\kappa)}$ est la matrice des complaisances élastiques dans la configuration (κ) pour les valeurs $\boldsymbol{\pi}_\kappa$, $\boldsymbol{\alpha}$ des variables d'état.

En introduisant le tenseur de déformation de Green $\boldsymbol{\Delta}^e$ au lieu de $\mathbf{C}^e$, (2) s'écrit:

$$\dot{\boldsymbol{\Delta}}^e - \frac{\partial \boldsymbol{\Delta}^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T = \mathbf{L}^{(\kappa)}: \dot{\boldsymbol{\pi}}_\kappa. \tag{3}$$

C'est l'équation (6) de [2]. Mais en admettant que le ler membre de cette équation, que nous posions égal à $\mathscr{D}^e$, avait une valeur indépendante du R.D. choisi et la même qu'en représentation lagrangienne (κ fixée) nous commettions une erreur, comme on va le montrer en 2.4.

2. *Représentation lagrangienne*

L'état est défini par $\mathbf{C}_0 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$, les variables $\boldsymbol{\alpha}$ transportées dans la configuration (0) par la transformation $\mathbf{P}^{-1}$, enfin le tenseur $\mathbf{P}$ lui-même. Nous désignerons par $\{\mathbf{a}\}$ l'ensemble $\{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{P}\}$. On peut aussi définir l'état par le tenseur des contraintes de Kirchhoff $\boldsymbol{\pi}_0$ relatif à la configuration fixe (0) et les variables **a**. $\mathbf{C}^0$ est une fonction de $\boldsymbol{\pi}_0$, **a** qui, dérivée par rapport à t, donne:

$$\dot{\mathbf{C}}_0 - \frac{\partial \mathbf{C}_0}{\partial a} \cdot \dot{\mathbf{a}}^T = 2\mathbf{L}^{(0)} : \dot{\boldsymbol{\pi}}_0 \tag{4}$$

analogue de la relation (2). On va étudier le passage de (4) à (2).

2.3 *Transformation du second membre de* (4)

De la formule de transformation pour les contraintes:

$$\frac{\boldsymbol{\pi}_0}{\rho_0} = \mathbf{P}^{-1} \frac{\boldsymbol{\pi}_\kappa}{\rho_\kappa} \mathbf{P}^{T-1} \tag{5}$$

on déduit:

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}_0 = \frac{\rho_0}{\rho_\kappa} \mathbf{P}^{-1} [\dot{\boldsymbol{\pi}}_\kappa - \mathrm{PP}^{-1} \boldsymbol{\pi}_\kappa - \boldsymbol{\pi}_\kappa \mathbf{P}^{T-1} \dot{\mathbf{P}}^T + \boldsymbol{\pi}_\kappa \operatorname{tr} (\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1})] \mathbf{P}^{T-1}. \tag{6}$$

Compte-tenu de la formule de transformation des complaisances élastiques:

$$L_{ijkl}^{(0)} = P_{\alpha i} P_{\beta j} P_{\gamma k} P_{\delta 1} L_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(\kappa)} \frac{\rho_\kappa}{\rho_0}$$

il vient:

$$\mathbf{L}^{(0)} : \dot{\boldsymbol{\pi}}_0 = \mathbf{P}^T [\mathbf{L}^{(\kappa)} : (\dot{\boldsymbol{\pi}}_\kappa - \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\pi}_\kappa - \boldsymbol{\pi}_\kappa \mathbf{P}^{T-1} \dot{\mathbf{P}}^T + \boldsymbol{\pi}_\kappa tr(\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}))] \mathbf{P}. \tag{7}$$

2.4 *Transformation du premier membre de* (4)

On a:

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{P}^T \mathbf{C}^e \mathbf{P}. \tag{8}$$

Le calcul de $\dot{\mathbf{C}}_0$ est immédiat. Celui de $(\partial \mathbf{C}_0 / \partial \mathbf{a}) \cdot \dot{\mathbf{a}}^T$ est plus délicat. $\mathbf{C}^e$ est une fonction déterminée (notée $\tilde{\mathbf{C}}^e$) des variables $\boldsymbol{\pi}_\kappa$, $\boldsymbol{\alpha}$. Avec les variables $\boldsymbol{\pi}_0$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{P}$ on aura:

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{C}}^e (\mathbf{P} \boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{P}^T \det \mathbf{P}^{-1}, \boldsymbol{\alpha}) P. \tag{9}$$

La dérivation de $\tilde{\mathbf{C}}^e$ par rapport à $\mathbf{P}$ fait apparaître

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{C}}^e}{\partial \boldsymbol{\pi}_\kappa} : \frac{\rho_\kappa}{\rho_0} [\dot{\mathbf{P}} \boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \boldsymbol{\pi}_0 \dot{P}^T - P \boldsymbol{\pi}_0 \mathbf{P}^T \operatorname{tr} (\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1})] \tag{10}$$

d'où

$$\dot{\mathbf{C}}_0 - \frac{\partial \mathbf{C}_0}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\mathbf{a}}^T = \mathbf{P}^T \left\{ \dot{\mathbf{C}}^e - \frac{\partial \mathbf{C}^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T - 2\mathbf{L}^{(\kappa)} : [\dot{P} P^{-1} \boldsymbol{\pi}_\kappa + \boldsymbol{\pi}_\kappa \mathbf{P}^{T-1} \dot{\mathbf{P}}^T - \boldsymbol{\pi}_\kappa \operatorname{tr} (\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1})] \right\} \mathbf{P}. \tag{11}$$

Il résulte de (7) et (11) que l'équation (2) *complète* se déduit bien de l'équation (4) par transport convectif de gradient **P**, mais que ce transport ne peut pas être effectué *séparément* sur chacun des deux membres de (4).

En particulier (en utilisant les tenseurs de Green) $\dot{\boldsymbol{\Delta}}^e - (\partial \boldsymbol{\Delta}^e / \partial \boldsymbol{\alpha}) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T$ n'est pas la transportée de $\dot{\boldsymbol{\Delta}}_0 - (\partial \boldsymbol{\Delta}_0 / \partial \mathbf{a}) \cdot \dot{\mathbf{a}}^T$. De plus pour 2 R.D. différents, cette grandeur ne se transporte pas de l'un à l'autre par transport convectif. Ceci est dû au fait que $\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}$ change de l'un à l'autre. On vérifiera aisément que si: $\mathbf{P}' = \mathbf{V}^T(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{P}$ on obtient:

$$\dot{\Delta}'^e - \frac{\partial \boldsymbol{\Delta}'e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T = \mathbf{V}^T \left[\dot{\boldsymbol{\Delta}}^e - \frac{\partial \boldsymbol{\Delta}^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T - \mathbf{L}^{(\kappa)} : (\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\pi}_\kappa + \boldsymbol{\pi}_\kappa \mathbf{V}\dot{\mathbf{V}}^{-1}) \right] \mathbf{V}$$

et non pas

$$\mathbf{V}^T\left[\dot{\mathbf{\Delta}}^e - \frac{\partial \mathbf{\Delta}^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T\right]\mathbf{V}.$$

En résumé nous pouvons bien dire comme en [2] que les relations (2) et (4) (les équations (2) et (7) de [2]) sont deux aspects d'une même relation matérielle ou intrinsèque. Mais nous n'avons pas le droit de considérer leurs premiers membres comme les deux aspects d'un même tênseur matériel baptisé vitesse de déformation élastique.

3. REPORT DE LA RELATION D'ELASTICITE DANS LA CONFIGURATION ACTUELLE

3.1 *En partant de la relation* (2), *puisque*:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} = \mathbf{E}\frac{\boldsymbol{\pi}_\kappa}{\rho_\kappa}\mathbf{E}^T$$

le transport convectif covariant de gradient **E** (multiplier à gauche par $\mathbf{E}^{T-1}$, à droite par $\mathbf{E}^{-1}$) fait apparaître au second membre la dérivée de Truesdell de $\boldsymbol{\sigma}$ dans la transformation **E**:

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{E}^{T-1}\dot{\mathbf{E}}^T + \sigma\,\mathrm{tr}\,(\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}) \tag{12}$$

et au premier membre les quantités:

$$\mathbf{E}^{T-1}\dot{\mathbf{C}}^e\mathbf{E}^{-1} = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{E}^{T-1}\dot{\mathbf{E}}^T = 2\{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\}_s$$

et

$$\mathbf{D}' = \mathbf{E}^{T-1}\left(\frac{\partial \mathbf{\Delta}^e}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T\right)\mathbf{E}^{-1}.$$

On obtient:

$$\{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\}_s - \mathbf{D}' = \mathbf{L}^{(a)}\colon \check{\boldsymbol{\sigma}} \tag{13}$$

$\mathbf{L}^{(a)}$ désignant la matrice des complaisances élastiques dans la configuration actuelle pour les valeurs actuelles des variables, $\{\ \}_s$ la partie symétrique d'un tenseur.

Dans [2] nous avons égalé le premier membre de (13) à une vitesse de déformation élastique eulérienne $\mathbf{D}^e$ que nous supposions coïncider avec la vitesse lagrangienne actualisée. C'était une erreur, d'après ce que nous avons montré au §II.4. Il convient de rectifier les équations écrites dans [2] §5 et 6 en y rétablissant partout l'expression $\{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\}_s - \mathbf{D}'$ à la place de $\mathbf{D}^e$.

3.2 En partant de la relation lagrangienne (4), par transport convectif de gradient **F** on obtient de manière analogue:

$$\mathbf{D} - \mathbf{D}'' = \mathbf{L}^{(a)}\colon \hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{14}$$

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ est la dérivée de Truesdell dans la transformation complète **F**:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathrm{grad}\,\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathrm{grad}^T\,\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{15}$$

où **v** est la vitesse du point matériel et grad $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$.

D est la vitesse de déformation complète $\{\mathrm{grad}\ \mathbf{v}\}_s$.

$\mathbf{D}''$ transporté de $(1/2)(\partial C_0/\partial \mathbf{a}) \,.\, \dot{\mathbf{a}}^T$ et $\mathbf{L}^{(a)}\colon \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ sont respectivement les vitesses de déformation plastique et élastique (actualisées) au sens de Rice.

4. DEFINITION DE LA VITESSE DE DEFORMATION ELASTIQUE DANS LA CONFIGURATION ACTUELLE DANS LA REPRESENTATION PAR REPERE DIRECTEUR

Comme indiqué au no. 1 nous prenons comme configuration fixe entre t et $+dt$ la configuration actuelle à t, nous ramenons le R.D. et la contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ à leurs position et valeur à t. Pour r entre t et $t+dt$ on a: $\mathbf{E}=\mathbf{I}+\boldsymbol{\epsilon}$ ($\boldsymbol{\epsilon}$ infinitésimal). On pose:

$$\mathbf{D}^e = \lim_{r\to t} \{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\}_s. \tag{16}$$

Cette grandeur est indépendante du R.D. choisi. Car si l'on remplace $\mathbf{E}$ par $\mathbf{E}'=\mathbf{E}\mathbf{V}(\boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{V}(\boldsymbol{\alpha})$ matrice orthogonale, on obtient:

$$\dot{\mathbf{E}}'\mathbf{E}'^{-1} = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{E}\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}^{-1}$$

d'où ($\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1}$ étant antisymétrique):

$$\lim \{\dot{\mathbf{E}}'\mathbf{E}'^{-1}\}_s = \lim \{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\}_s.$$

Si alors nous posons:

$$\lim \{\dot{\mathbf{E}}\mathbf{E}^{-1}\}_s = \mathbf{D}^e + \boldsymbol{\omega}^d \tag{17}$$

et

$$\lim \frac{\partial\{\boldsymbol{\epsilon}\}_s}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T = \mathbf{D}_l' \tag{18}$$

l'équation (13) devient:

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{L}^{(a)}: [\dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\mathbf{D}^e + \boldsymbol{\omega}^d)\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{D}^e - \boldsymbol{\omega}^d) + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}^e] + \mathbf{D}_l' \tag{19}$$

$\boldsymbol{\omega}^d$ et $\mathbf{D}_l'$dépendent du R.D. choisi.

Supposons qu'il existe un R.D. (défini pour une contrainte initiale $\boldsymbol{\sigma}_0$) tel que:

(a) $\boldsymbol{\Delta}^e$ reste infinitésimal,

(b) $(\partial\boldsymbol{\Delta}^e/\partial\boldsymbol{\alpha})=0$: ceci signifie que par rapport à ce repère privilégié les propriétés thermoélastiques sont indépendantes de l'écrouissage.

Dans un tel cas on aura: $\mathbf{D}_l'=0$, $\mathbf{D}^e$ en général d'un ordre de grandeur très inférieur à $\boldsymbol{\omega}^d$ à cause de l'importance des déformations plastiques ($\boldsymbol{\omega}^d$ n'est pas lié à ces déformations, mais à l'hétérogénéité de leur distribution). L'équation (19) se réduit alors à:

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{L}^{(a)}: (\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\omega}^d\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}^d). \tag{20}$$

On retrouve la formulation proposée dans nos publications antérieures[2, 3], où était introduite la dérivée de Jaumann du tenseur σ par rapport au repère privilégié.

5. COMPARAISON ENTRE LES DEUX DEFINITIONS DE LA VITESSE DE DEFORMATION ELASTIQUE

Il paraît utile d'introduire l'aspect énergétique. Soit $\bar{\varphi}(\boldsymbol{\Delta}^e, \theta, \boldsymbol{\alpha})$ l'énergie libre massique exprimée dans un R.D. Du calcul de la puissance dissipée (cf. [3]) on déduit que la puissance des forces extérieures non transformée en chaleur est par unité de masse:

$$\dot{W}_{\text{élast}} = \frac{\boldsymbol{\pi}_\kappa}{\rho_\kappa}: \mathbf{E}^T\dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T. \tag{21}$$

Supposons qu'il existe un R.D. répondant aux 2 conditions du no. 4, sinon exactement, du moins approximativement†:

La première: $\mathbf{\Delta}^e$ infinitésimal, permet de remplacer le premier terme du second membre de (21) par $(\boldsymbol{\sigma}/\rho):\mathbf{D}^e$, $\mathbf{D}^e$ étant la vitesse de déformation élastique définie au no. 4.

La seconde: $(\partial\mathbf{\Delta}^e/\partial\boldsymbol{\alpha})=0$ montre (par le détour cf. [2] de l'enthalpie libre, transformée de Legendre-Fenchel de la fonction $\tilde{\varphi}$) que la fonction $\tilde{\varphi}$ se sépare sous la forme:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{\Delta}^e, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \varphi_1(\mathbf{\Delta}^e, \theta) + \varphi_2(\theta, \boldsymbol{\alpha})$$

et de même l'énergie interne $\tilde{u} = \tilde{\varphi} - \theta(\partial\varphi/\partial\theta)$.

Le premier terme du second membre de (21) est alors:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho}:\mathbf{D}^e = \frac{\boldsymbol{\pi}_\kappa}{\rho_\kappa}:\dot{\mathbf{\Delta}}^e = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\mathbf{\Delta}}:\dot{\mathbf{\Delta}}^e = \dot{\varphi}_1 - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\dot{\theta} = \dot{u}_1$$

taux de l'énergie interne instantanément récupérable par décharge.

Le second terme est:

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}\dot{\theta} = \dot{u}_2$$

taux d'énergie interne bloquée.

Une interprétation analogue n'existe pas pour la définition de Rice parce que $\mathbf{\Delta}^0$ (ou $\mathbf{C}^0$) dépend assurément de $\mathbf{P}$ en transformation anélastique, donce on n'a jamais $(\partial\mathbf{\Delta}^0/\partial\mathbf{a})=0$ (inséparabilité de $\mathbf{\Delta}^0$ et des variables $\mathbf{a}$ dans φ ou u), ni exactement, ni approximativement.

Terminons par un exemple: soit un minocristal isolé qui se déforme plastiquement par glissements. L'énergie élastique est celle du réseau atomique et de ses dislocations. Supposons pour simplifier que les glissements se fassent sous cission réduite constante (pas de blocage des dislocations, donc $(\partial\tilde{\varphi}/\partial\boldsymbol{\alpha})=0$). Suivant notre définition la vitesse de déformation élastique $\mathbf{D}^e$ est nulle, ce qui est cohérent avec (21) où $\dot{W}_{\text{élast}}=0$.

Par contre avec la définition de J.R. Rice la vitesse de déformation élastique n'est pas nulle puisque d'après (5) la contrainte de Kirchhoff par rapport à une configuration fixe n'est pas constante. La vitesse de Rice est affectée par les glissements plastiques (ceci apparaît sous forme précise dans les relations (7) et (11)). La différence avec notre définition provient de ce que l'enthalpie libre utilisée par Rice introduit la déformation totale $\mathbf{\Delta}_0$ et non pas la déformation élastique seule.

REFERENCES

1. J. R. Rice, Inelastic constitutive relations for solids; an internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* **19**, 433 (1971).
2. J. Mandel, Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte. *Int. J. Solids Structures* **17**, 873–878 (1981).
3. J. Mandel, *Plasticité et Viscoplasticité*, Cours CISM, 97, Udine. Springer, New York (1971).
4. J. Mandel, Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformation anélastiques du polycristal. *J. Méca. Th. et Appl.* **1**, 7–23.

†Tel est le cas pour un polycristal d'un R.D. dont la vitesse de rotation est une certaine moyenne des vitesses de rotation des cristaux composants. cf. [4].